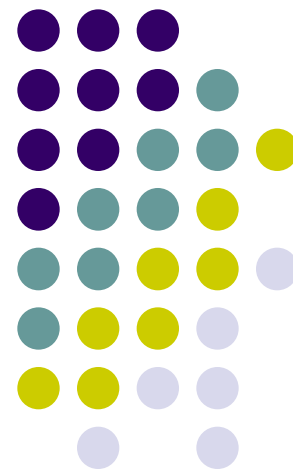


А.В. Ермоленко

к.ф.-м.н., доцент

**Учет трансверсальных
деформаций
в контактных задачах со
свободной границей**



Уравнение Софи Жермен-Лагранжа



$$Dw^{IV} = q_n$$

Уравнения Кармана

$$D\Delta^2 w = q_n + L(\Phi, w)$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w)$$



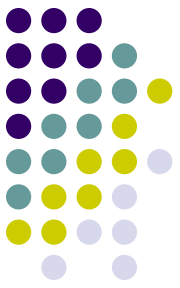
Уравнения типа Кармана-Тимошенко-Нагди

$$D\Delta^2 w = q_n - h_*^2 \Delta q_n + (I - h_\psi^2 \Delta)L(\Phi, w)$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 \Phi = \frac{\nu}{Eh} \Delta m_n - \frac{1}{2} L(w, w)$$

$$\psi_{1,1} + \psi_{2,2} = -\frac{2(1+\nu)}{Eh} (q_n + L(\Phi, w))$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in \Omega, \\ x_3 \equiv \xi \in [\frac{1}{2}(b-h), \frac{1}{2}(b+h)]\}$$



$$M_{ij} = \int_{(b-h)/2}^{(b+h)/2} (J\sigma_{ij}^{\xi} - \frac{\nu}{1-\nu} J\sigma_{33}^{\xi} \delta_{ij}) \xi d\xi, \quad i, j = 1, 2,$$

$$M'_{11} = -D(w_{,11} + \nu w_{,22}), \quad M'_{22} = (1 \leftrightarrow 2)M'_{11},$$

$$M'_{12} = -(1-\nu)Dw_{,12};$$

$$M''_{11} = -D(\psi_{1,1} + \nu\psi_{2,2}), \quad M''_{22} = (1 \leftrightarrow 2)M''_{11},$$

$$M''_{12} = -\frac{1}{2}(1-\nu)D(\psi_{1,2} + \psi_{2,1});$$

$$M_{ij} = M'_{ij} + M''_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Аналитическое решение контактной задачи



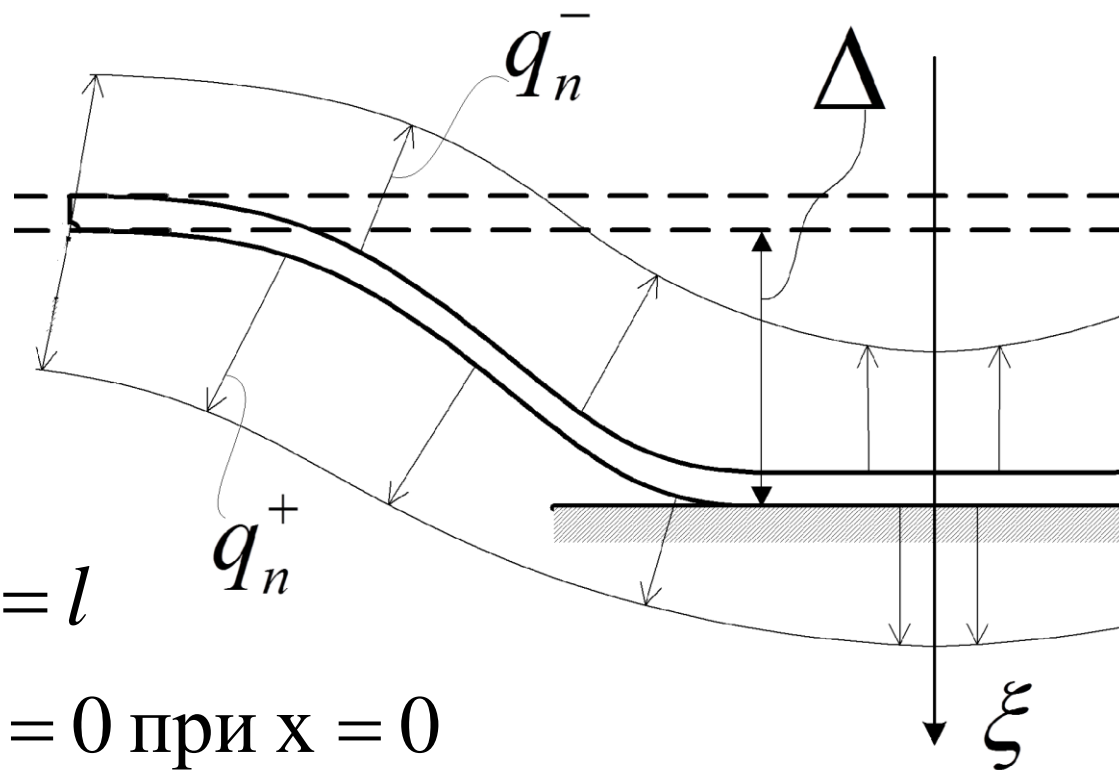
$$w^{IV} = p_n - h_\psi^2 p_n'',$$

$$\psi_1' = -h_\psi^2 p_n$$

$$m_n = h q_n^+, p_n = q_n / D$$

$$w'' = 0, w''' = 0 \quad \text{при } x = l$$

$$w = 0, -w' + \psi_1 = 0, \psi_1 = 0 \quad \text{при } x = 0$$



На участке выстилания $[x_0, l]$ будем требовать выполнения условий:

– выстилания:

$$w(x) = \Delta;$$

– сопряжения по нижней лицевой поверхности частей пластины:

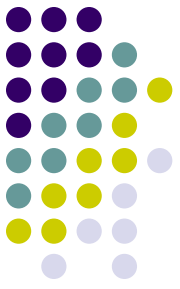
$$w(x_0 - 0) = w(x_0 + 0),$$

$$(-w' + \psi_1)(x_0 - 0) = (-w' + \psi_1)(x_0 + 0)$$

$$r(x) = R\delta(x - x_0) + \left(p_0 + C_1 \operatorname{ch} \frac{x - l}{h_\psi} \right) H(x - x_0)$$

$$R = 0$$

Теория типа КТН



$$-\frac{p_0 x_0^4}{24} + \frac{R x_0^3}{6} - R h_\psi^2 x_0 + \frac{p_0 h_\psi^2}{2} x_0^2 +$$
$$-\frac{c_1 h_\psi x_0^3}{6} \operatorname{sh} \frac{x_0 - l}{h_\psi} + \frac{c_1 h_\psi^2 x_0^2}{2} \operatorname{ch} \frac{x_0 - l}{h_\psi} = \Delta,$$

$$\frac{p_0 x_0^3}{6} - \frac{R x_0^2}{2} + R h_\psi^2 - p_0 h_\psi^2 x_0 + \frac{c_1 h_\psi x_0^2}{2} \operatorname{sh} \frac{x_0 - l}{h_\psi} -$$
$$- c_1 h_\psi^2 x_0 \operatorname{ch} \frac{x_0 - l}{h_\psi} = 0$$

Классическая теория

$$R = \frac{q_0}{3} x_0, \quad x_0 = (72\Delta / p_0)^{1/4},$$

Эффект противофазы



$$w^{IV} = p_n - h_*^2 p_n''$$

$$w(0)=0, w(1)=0, w'(0)=0, w'(1)=0$$

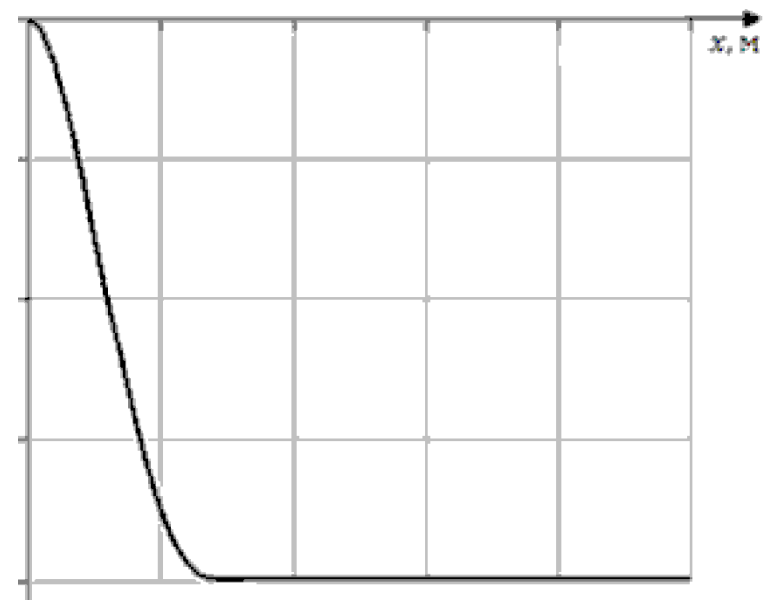
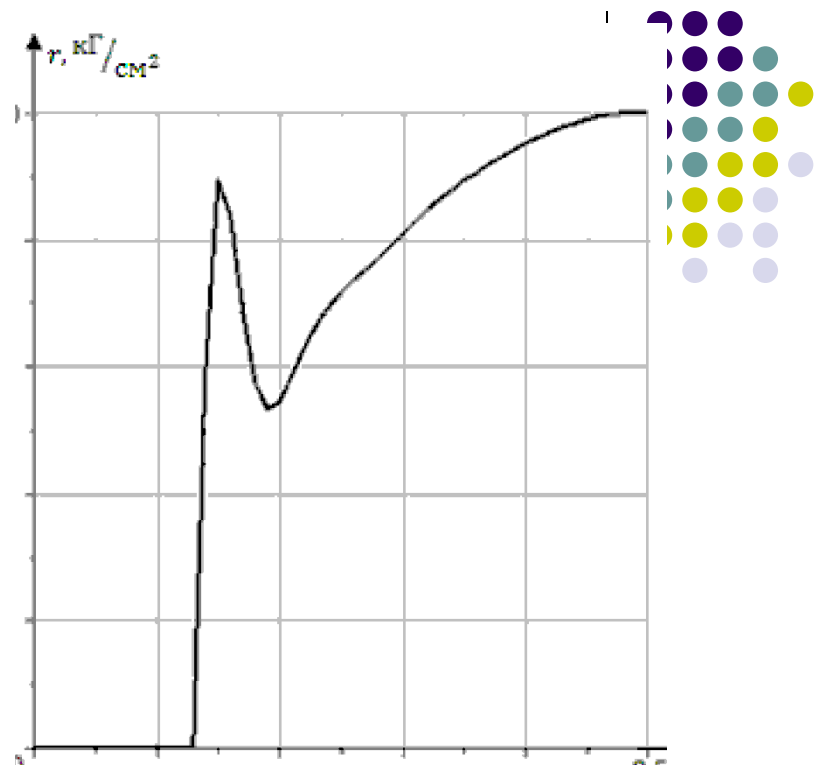
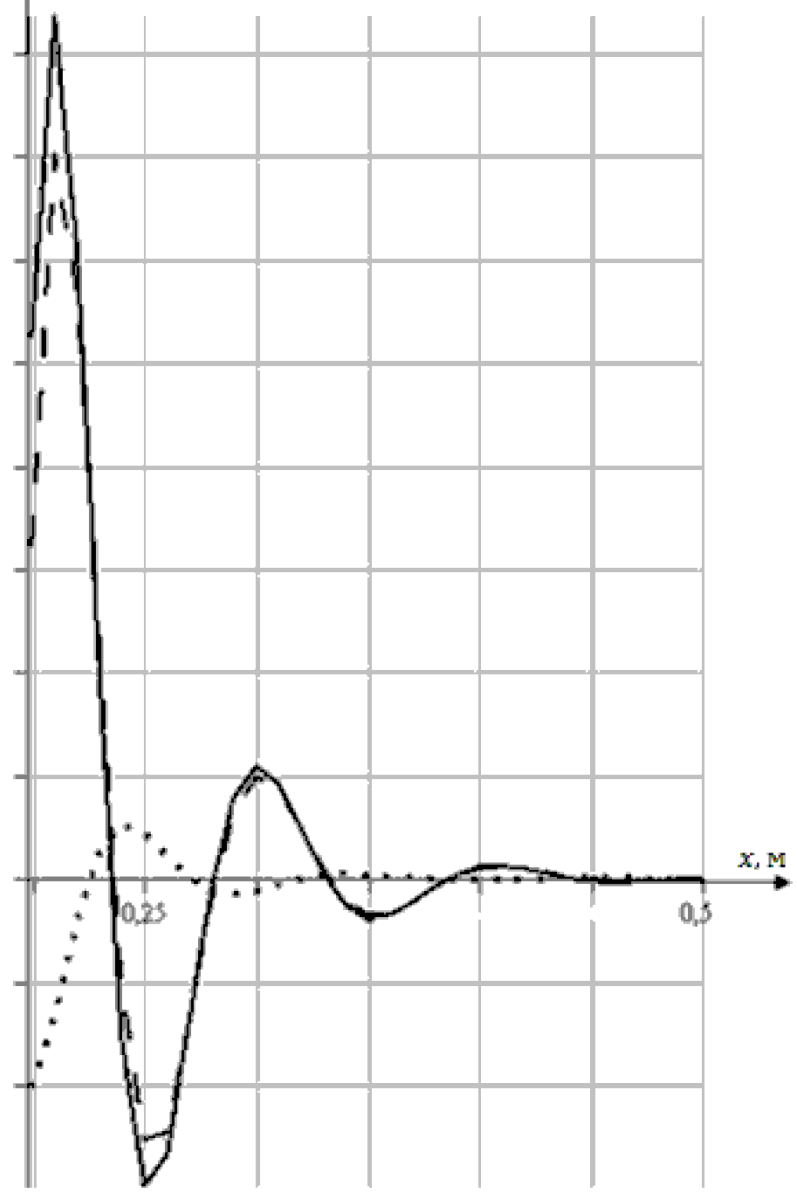
$$r_k = [r_{k-1} + \beta(w_{k-1} - \Delta)]_+, \beta > 0,$$

$$w_k = \frac{1}{D} \int_0^l (q_n^+ - r_k(\xi) - h_*^2 (q_n^+ - r_k)'(\xi)) G(x, \xi) d\xi.$$

$$r_0 = 0, w_0 = \frac{q_0}{D} \int_0^l G(x, \xi) d\xi.$$

$$q_n^+ = \sin \frac{\pi x}{l} (\text{МПа}), \quad \nu = 0,3, \quad E = 2,1 \cdot 10^6 \text{Па},$$

$M, \text{кГ}$ $l = 1\text{М}, h = 0,01\text{М}, \Delta = 0,01\text{М}$





Литература

- Михайловский Е.И.** Элементы конструктивно–нелинейной механики. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского университета, 2011. 212 с.
- Ермоленко А.В.** Аналитическое решение контактной задачи для жестко закрепленной пластины и основания. В мире научных открытий. Красноярск: НИЦ, 2011. С.11–17.
- Михайловский Е.И., Бадюкин К.В., Ермоленко А.В.** Теория изгиба пластин типа Кармана без гипотез Кирхгофа // Вестник Сыктывкарского университета. Сер.1: Мат. Мех. Инф. 1999. Вып.3. С.181–202.
- Ермоленко А.В.** Теория плоских пластин типа Кармана–Тимошенко–Нагди относительно произвольной базовой плоскости // В мире научных открытий. Красноярск: НИЦ, 2011. №8.1 (20). С. 336–347.
- Михайловский Е.И., Ермоленко А.В., Миронов В.В., Тулубенская Е.В.** Уточненные нелинейные уравнения в неклассических задачах механики оболочек. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2009. 141 с.
- Михайловский Е.И., Тарасов В.Н.** О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей // Российская АН. ПММ. 1993. Т. 57. Выпуск 1. С. 128–136.